Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Considérons la fonction définie par l'intégrale

$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

1. *Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer le $DL(0,10)$ de la fonction f.*
3. *Déterminer un développement asymptotique de la fonction f au voisinage de $+\infty$ à la précision $1/x^{10}$.*

Solution :

1. *La fonction $g : t \mapsto 1/\sqrt{1+t^4}$ est définie et continue sur R. D'après le théorème fondamental, elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. De plus G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:*

$$f(x)=G\left(x^2\right)-G(x)\,.$$

On en déduit que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. *Il vient alors que fonction f' est de classe $\mathcal{C}^9$ sur $\mathbb{R}$ et en primitivant le $DL(0,9)$ de f', on obtient le $DL(0,10)$ de f :*

$$f(x)=-x+x^2+\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{24}-\frac{x^{10}}{10}+o(x^{10}).$$

3. *Posons ensuite $X=\dfrac{1}{x}$. On a*

$$f(X)=\int_{1/x}^{1/x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt=\int_x^{x^2}\frac{-1}{u^2}\frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}}\,du=-f(x)$$

en effectuant le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$. *On trouve qu'au voisinage de* $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{24x^9} + \frac{1}{10x^{10}} + o(x^{-10})$$

Références