Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Étudier le prolongement en 0 et les branches infinies de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)\arctan x}$$

Solution : *On a au voisinage de 0 :*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)\arctan x} = \frac{x^3}{x + 2/3x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)} = \frac{x^2}{1 + 2/3x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} = x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$

donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)$. Son prolongement est dérivable en 0. La tangente au graphe de f en 0 est l'axe des abscisses et le graphe est au dessus de la tangente.

*Pour étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$, calculons un développement asymptotique au voisinage de 0 de $f(1/x)$. On sait que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ (voir la proposition **??** page **??**) donc $\arctan 1/x = \pi/2 - x + 1/3x^3 - 1/5x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$ et on a :*

$$f(1/x) = \frac{1}{x(1+x^2)\left(\pi/2 - x + 1/3x^3 - 1/5x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right)} = \frac{2}{\pi x}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1 - 2/\pi x + 2/(3\pi)x^3 - (2/5\pi)x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)}$$

et $f(x) = 2\,\frac{x}{\pi} + 4\,\pi^{-2} + 2\,\frac{-1+4\,\pi^{-2}}{\pi\,x} + 2\,\frac{-2/3\,\pi^{-1} - 2\,\frac{\pi^2-4}{\pi^3}}{\pi\,x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^2\right)$ donc la droite d'équation $y = 2\,\frac{x}{\pi} + 4\,\pi^{-2}$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

Références