Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Construire les courbes représentatives des deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

On précisera les asymptotes éventuelles, la position de la courbe par rapport aux asymptotes, et on étudiera éventuellement les prolongements par continuité.

Solution :

— *Le domaine de définition de f est $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition par opérations sur les fonctions dérivables et pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} \leqslant 0$ (car $x\ln x \leqslant (x+1)\ln(x+1)$). Donc la fonction f est décroissante. On remarque que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Puisque $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, la courbe présente une tangente verticale en 0. Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{\ln x(1+\frac{1}{x})}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$ et donc $f(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. La droite $y = 1$ est une asymptote, et la position par rapport à l'asymptote se lit sur le tableau de variations.*

— *Le domaine de définition de g est $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $g(x) = \exp\left[\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)\right]$. g est dérivable sur son domaine de définition par opération sur les fonctions dérivables et pour tout $x \in D_g$,*

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[2x\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(\frac{e^x+1}{2})\right]$$

Étudions le signe de $\varphi(x) = 2x\dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln(\dfrac{e^x+1}{2})$. On remarque que $\varphi'(x) = \dfrac{2xe^x}{(e^x+1)^2}$ est du signe de x. Comme $\varphi(0) = 0$, il vient que $g'(x) \geqslant 0$.

Lorsque $x \to 0$, *posons*

$$a(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x+1}{2}) = \frac{1}{x}\ln(1+\frac{e^x-1}{2}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}x-\frac{1}{192}x^3+o(x^3)$$

On a alors

$$\boxed{g(x) = \sqrt{e}+\frac{\sqrt{e}}{8}x+\frac{\sqrt{e}}{128}x^2+o(x^2)}$$

Donc g *se prolonge par continuité en* 0 *en posant* $g(0) = \sqrt{e}$. *La fonction ainsi prolongée est dérivable en* 0, *de dérivée* $g'(0) = \frac{\sqrt{e}}{8}$ *et localement, la courbe se situe au dessus de sa tangente.*

Lorsque $x \to +\infty$, *posons* $h = \frac{1}{x}$,

$$\widetilde{g}(h) = \exp\left(h\ln\left[\frac{e^{\frac{1}{h}}+1}{2}\right]\right) = \exp\left(1+h\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{1}{h}}}{2}\right]\right)$$

Lorsque $h \to 0^-$, $e^{\frac{1}{h}} \to 0$, *et donc* $\widetilde{g}(h) \to 1$. *Lorsque* $h \to 0^+$, *on utilise la deuxième expression :* $e^{-\frac{1}{h}} \to 0$ *et donc* $\widetilde{g}(h) \to e$. *On trouve donc que lorsque* $x \to -\infty$, $g(x) \to 1$ *et lorsque* $x \to +\infty$, $g(x) \to e$. *La position par rapport aux asymptotes se lit sur le tableau de variations.*

Références