Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Construire la courbe

$$y = \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution : *Introduisons la fonction* $f : x \mapsto \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)}$. *Le domaine de définition de* f *est* $\mathbb{R}^*$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *par opérations sur les fonctions dérivables et pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\left(-\ln(\frac{e^x+1}{2}) + \frac{xe^x}{e^x+1}\right)$$

Étudions la fonction g *donnée par* $g(x) = \frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(\frac{e^x+1}{2})$. *On a :* $g'(x) = \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}$, *de quoi on tire facilement les variations de* g *puis celles de* f *:* f *est croissante sur* $\mathbb{R}$. *En utilisant les règles de calcul avec les DLs, on montre que :* $f(x) = e^{1/2} + \frac{e^{1/2}}{8}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. *Donc on peut prolonger* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = e^{1/2}$ *et le prolongement est dérivable en* 0. *En* $+\infty$, *on remarque que*

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(x + \ln\left(1+e^{-x}\right) - \ln 2\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc $\lim_{+\infty} f = e$.

Références