Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

14 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Faire l'étude locale en 0 *de la fonction définie par :*

$$f(x) = \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$$

Solution : *En effectuant un* $DL(0,n)$ *de* sin*, on trouvera :*

$$\frac{2}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2(\cdots + o(x^{n-2}))}$$

et de même avec un $DL(0,n)$ *de* $\cos x$*, on trouvera :*

$$\frac{1}{\ln(\cos x)} = \frac{1}{x^2(\cdots + o(x^{n-2}))}$$

et finalement, on aura à la fin :

$$f(x) = \cdots + o(x^{n-4})$$

Pour faire l'étude locale complète en 0*, il nous faut un terme significatif qui tend vers* 0*, et donc* $n - 4 \geqslant 1$*, donc* $n \geqslant 5$*. Faisons donc nos développements limités à l'ordre* 5*. On trouve après calculs que*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

Donc f *se prolonge en une fonction* $\widetilde{f}$ *dérivable en* 0*, avec* $\widetilde{f}(0) = 1$*,* $\widetilde{f}'(0) = 0$ *et localement la courbe représentative de* $\widetilde{f}$ *est située au dessus de sa tangente en* 0 *d'équation* $y = 1$*.*

Références