Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Faire l'étude locale en 0 *de la fonction définie par :*

$$f(x) = \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$$

Solution : *En effectuant un* $DL(0,n)$ *de* $\sin$, *on trouvera :*

$$\frac{2}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2(\cdots + o(x^{n-2}))}$$

et de même avec un $DL(0,n)$ *de* $\cos x$, *on trouvera :*

$$\frac{1}{\ln(\cos x)} = \frac{1}{x^2(\cdots + o(x^{n-2}))}$$

et finalement, on aura à la fin :

$$f(x) = \cdots + o(x^{n-4})$$

Pour faire l'étude locale complète en 0, *il nous faut un terme significatif qui tend vers* 0, *et donc* $n-4 \geqslant 1$, *donc* $n \geqslant 5$. *Faisons donc nos développements limités à l'ordre* 5. *On trouve après calculs que*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

Donc f *se prolonge en une fonction* $\widetilde{f}$ *dérivable en* 0, *avec* $\widetilde{f}(0) = 1$, $\widetilde{f}'(0) = 0$ *et localement la courbe représentative de* $\widetilde{f}$ *est située au dessus de sa tangente en* 0 *d'équation* $y = 1$.

Références