Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

27 janvier 2022

Exercice 0.1 ***Pas de titre***

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. *Donner le domaine de définition de* f.
2. *Montrer qu'elle se prolonge par continuité en* 0 *en une fonction dérivable.*
3. *Déterminer la tangente en* 0 *au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.*

Solution :

1. f *est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
2. *Calculons le développement limité de* f *à l'ordre* 2 *:*

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 \arctan x - \sin^3 x}{x^2 \sin^3 x} \\
&= \frac{x^2\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right) - \left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\right)}{x^2\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{6}x^5 + \frac{11}{120}x^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)}{x^5 - \frac{1}{2}x^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{6} + \frac{11}{120}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{11}{120}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{6} + \frac{7}{40}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}
\end{aligned}$$

L'existence du DL en 0 *à l'ordre* 1 *assure que l' on peut prolonger* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = \frac{1}{6}$ *et par dérivabilité en posant* $f'(0) = 0$.

3. *Une équation de la tangente en* 0 *est* $\boxed{y = \frac{1}{6}}$. *De plus :*

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{6} &= \frac{7}{40}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= \frac{7}{40}x^2\left(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{7}{40}x^2} \end{aligned}$$

donc la quantité $f(x) - \frac{1}{6}$ *est positive dans un voisinage de* 0 *et on en déduit que le graphe de* f *est au dessus de sa tangente en* 0 *dans un voisinage de* 0.

Références