Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1] and Alain Soyeur[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$*, l'équation*

$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5 \quad (\star)\,.$$

2. *En déduire les valeurs de* $\tan\dfrac{\pi}{5}$ *et* $\tan\dfrac{2\pi}{5}$*, que l'on exprimera sous la forme :*

$$\sqrt{p+q\sqrt{n}}, \quad (n,p,q) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$$

3. *En déduire la valeur de* $\tan\dfrac{\pi}{10}$.

Solution :

1. *Soit* z *une solution de* $(\star)$. $z \neq -i$ *donc* $1 - iz \neq 0$*. Posons* $U = \dfrac{1+iz}{1-iz}$*. Le nombre complexe* U *doit vérifier* $U^5 = 1$*. En posant* $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$*, il existe* $k \in [\![0,4]\!]$ *tel que :*

$$U = \omega^k$$

Alors :

$$z = -i\frac{\omega^k - 1}{\omega^k + 1} = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$

On vérifie réciproquement, que $\boxed{z = \tan\dfrac{k\pi}{5}}$ *est solution pour* $k \in [\![0,4]\!]$.

2. *Résolvons de façon différente l'équation* $(\star)$ *en développant les deux membres à l'aide de la formule du binôme de Newton :*

$$\begin{aligned} & 1 + 5(iz) + 10(iz)^2 + 10(iz)^3 + 5(iz)^4 + (iz)^5 \\ & = 1 - 5(iz) + 10(iz)^2 - 10(iz)^3 + 5(iz)^4 - (iz)^5 \\ \iff & \quad 5iz + 10(iz)^3 + (iz)^5 = 0 \\ \iff & \quad z\left[z^4 - 10z^2 + 5\right] = 0 \end{aligned}$$

Et si z est une solution non-nulle, $Z = z^2$ est racine du trinôme

$$Z^2 - 10Z + 5 = 0$$

qui possède deux racines réelles :

$$Z_1 = 5 - 2\sqrt{5} \quad Z_2 = 5 + 2\sqrt{5}$$

et donc, les racines de $(\star)$ sont :

$$\boxed{0, \quad \pm\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, \quad \pm\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

Comme $\tan\dfrac{k\pi}{5}$ *est strictement positif pour* $k = 1, 2$, *et comme* $\tan\dfrac{\pi}{5} < \tan\dfrac{2\pi}{5}$, *on trouve que*

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}$$

3. *En utilisant la formule de trigonométrie :*

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

avec $\theta = \dfrac{\pi}{10}$, *et en posant* $A = \tan\dfrac{\pi}{10}$, *A doit vérifier :*

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\, A^2 + 2A - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = 0$$

et A est alors la seule racine positive de ce trinôme :

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}}$$

Références