Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère la fonction f donnée pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{0\}$ par $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

1. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.*
2. *Étudier la dérivabilité du prolongement de f.*

Solution : *On a :*

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} \\
&= e^{\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{x}} \\
&= e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)} \\
&= \boxed{1-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)}
\end{aligned}$$

1. *On déduit de ce calcul que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. On peut alors prolonger f par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = 1}$.*
2. *L'existence d'un DL à l'ordre 1 équivaut à l'existence de la dérivée (du moins pour la fonction prolongée). Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.*

Références