Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. *Montrer que la fonction* f *peut être prolongée en une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer une équation de la tangente au graphe de* f *en* 0 *puis étudier la position de la courbe de* f *par rapport cette tangente.*

Solution :

1. f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *par opération sur les fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^*$. *Montrons que* f *est prolongeable en* 0 *en une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *en* 0. *Pour ce faire, calculons le développement limité de* f *en* 0. *Dans l'objectif d'étudier la position du graphe de* f *relativement à sa tangente en* 0, *poussons ce développement limité à l'ordre* 2 *:*

$$\begin{aligned}
\frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \\
&= \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}
\end{aligned}$$

On peut donc prolonger f *par continuité et dérivabilité en* 0 *en posant* $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Il peut être utile de le vérifier :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x + \underset{x\to 0}{o}(x) \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$.

Reste à montrer que f' est continue en 0. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) = & \quad -\frac{(x-1)e^x + 1}{(e^x - 1)^2} \\
\underset{x\to 0}{\sim} & \quad -\frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} \\
\underset{x\to 0}{\sim} & \quad -\frac{\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2} \\
\underset{x\to 0}{\sim} & \quad -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) \\
\underset{x\to 0}{\longrightarrow} & \quad \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

En résumé, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. *Une équation de la tangente en 0 au graphe de f est* $\boxed{y = -\frac{x}{2} + 1}$. *De plus :*

$$\begin{aligned}
f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1\right) = & \quad \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\
= & \quad \frac{x^2}{12}\left(1 + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) \\
\underset{x\to 0}{\sim} & \quad \boxed{\frac{x^2}{12}}
\end{aligned}$$

La quantité $f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1\right)$ est donc positive dans un voisinage de 0. On en déduit que le graphe de f est situé au dessus de sa tangente en 0 dans un voisinage de 0.

Références