

# Pas de titre

Alain Soyeur<sup>1</sup>, François Capaces<sup>2</sup>, and Emmanuel Vieillard-Baron<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>2</sup>,  
<sup>3</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

## Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point indiqué :

1.  $f(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{(x^2+1)(x+3)}$  en  $x = 0$ .

2.  $f(x) = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\sin x} - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{sh} x}$  en  $x = 0$ .

3.  $f(x) = \frac{x^2 + \cos x - \operatorname{ch} x}{\sqrt{x}}$  en  $x = 0$ .

4.  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$  en  $x = 0^+$ .

5.  $f(x) = \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$  en  $x = 0$ .

6.  $f(x) = \arctan(2x) - 2 \arctan(x)$  en  $x = 0$ .

7.  $f(x) = \arctan \sin x - \sin \arctan x$  en  $x = 0$ .

8.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$  en  $x = +\infty$ .

### Solution :

1. On a  $e^x - \sqrt{1+x} = (1+x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x) = \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)$  et  $(x^2+1)(x+3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3$ .

Donc

$$\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{(x^2+1)(x+3)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{\frac{x}{6}}$$

2. On a :  $\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\sin x} = 1 + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$  et  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{sh} x} = 1 - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$  donc :

$$\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\sin x} - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{\frac{1}{3}x^3}$$

3.

$$\frac{x^2 + \cos x - \operatorname{ch} x}{\sqrt{x}} = \frac{-\frac{1}{360}x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^6)}{\sqrt{x}}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{-\frac{x^{\frac{11}{2}}}{360}}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x} - \sqrt{\sin x} &= \sqrt{x} - \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\
 &= \sqrt{x} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} \right) \\
 &= \sqrt{x} \left( \frac{1}{12}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{\frac{x^{\frac{5}{2}}}{12}}
 \end{aligned}$$

car  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

5. On a :  $\text{sh}(\sin x) = x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{90} + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$  et  $\sin(\text{sh } x) = x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{90} + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$  donc :

$$\begin{aligned}
 \text{sh}(\sin x) - \sin(\text{sh } x) &= \frac{x^7}{45} + o_{x \rightarrow 0}(x^7) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{\frac{x^7}{45}}
 \end{aligned}$$

6. On a :  $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$  et donc :  $\arctan 2x = 2x - \frac{8x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$  ce qui amène :

$$\begin{aligned}
 \arctan(2x) - 2 \arctan(x) &= -2x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{-2x^3}
 \end{aligned}$$

7. On a  $\arctan(\sin(x)) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 - \frac{83}{240}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$  et  $\sin(\arctan(x)) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{16}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$  donc :

$$\begin{aligned}
 \arctan \sin x - \sin \arctan x &= -\frac{x^7}{30} + o_{x \rightarrow 0}(x^7) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{-\frac{x^7}{30}}
 \end{aligned}$$

8. Posons  $X = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} &= e^X - e^{\frac{X}{1+X}} \\
 &= e^X - e^{X(1+X+o_{X \rightarrow 0}(X))} \\
 &= e^X - e^{X+X^2+o_{X \rightarrow 0}(X^2)} \\
 &= 1 + X + \frac{X^2}{2} - \left( 1 + X - \frac{X^2}{2} \right) + o_{X \rightarrow 0}(X^2) \\
 &= X^2 + o_{X \rightarrow 0}(X^2) \\
 &\underset{X \rightarrow 0}{\sim} X^2 \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{x^2}}
 \end{aligned}$$



**Références**