Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

[2], ,

[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

14 mai 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

1. *Écrire le DL(0,n) de* $\dfrac{1}{1+u}$ *en écrivant le reste exact.*
2. *Que donne cette formule pour* $\dfrac{1}{1+e^{-2t}}$ *?*
3. *Montrer que*

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt = 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)\pi}+1}{(2k+1)^2+1}$$

Solution :

1. *Pour tout* $u \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{n} u^k + \frac{u^{n+1}}{1-u}$$

donc

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k + (-1)^{n+1} \frac{u^{n+1}}{1+u}.$$

2. *On obtient alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt} + (-1)^{n+1} \frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}.$$

3. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$\frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} = \frac{2\sin t}{e^t + e^{-t}} = \frac{2\sin t}{e^t} \frac{1}{1+e^{-2t}} = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \sin t + (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t} \sin t}{1+e^{-2t}}.$$

En effectuant deux intégrations par parties successives, on calcule que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ *:*

$$\int_0^{\pi} e^{-(2k+1)t} \sin t \, dt = \frac{e^{-(2k+1)\pi}+1}{(2k+1)^2+1}$$

donc en passant à l'intégrale dans la somme, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)\pi}+1}{(2k+1)^2+1} + \int_0^\pi (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t}\sin t}{1+e^{-2t}}\, dt.$$

Mais

$$\left|\int_0^\pi (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t}\sin t}{1+e^{-2t}}\, dt\right| \leqslant \int_0^\pi e^{-2(n+1)t} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\, dt \leqslant \int_0^\pi e^{-2(n+1)t}\, dt = -\frac{1}{2\,(n+1)}\left(e^{-2(n+1)\pi}-1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

d'où le résultat.

Références