

Pas de titre

Alain Soyeur¹, François Capaces², and Emmanuel Vieillard-Baron³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²,
³Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

1. Écrire le DL(0,n) de $\frac{1}{1+u}$ en écrivant le reste exact.
2. Que donne cette formule pour $\frac{1}{1+e^{-2t}}$?
3. Montrer que

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)\pi} + 1}{(2k+1)^2 + 1}$$

Solution :

1. Pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^n u^k + \frac{u^{n+1}}{1-u}$$

donc

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k + (-1)^{n+1} \frac{u^{n+1}}{1+u}.$$

2. On obtient alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-2kt} + (-1)^{n+1} \frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}.$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} = \frac{2 \sin t}{e^t + e^{-t}} = \frac{2 \sin t}{e^t} \frac{1}{1+e^{-2t}} = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \sin t + (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t} \sin t}{1+e^{-2t}}.$$

En effectuant deux intégrations par parties successives, on calcule que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\int_0^\pi e^{-(2k+1)t} \sin t dt = \frac{e^{-(2k+1)\pi} + 1}{(2k+1)^2 + 1}$$

donc en passant à l'intégrale dans la somme, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)\pi} + 1}{(2k+1)^2 + 1} + \int_0^\pi (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t} \sin t}{1 + e^{-2t}} dt.$$

Mais

$$\left| \int_0^\pi (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t} \sin t}{1 + e^{-2t}} dt \right| \leq \int_0^\pi e^{-2(n+1)t} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt \leq \int_0^\pi e^{-2(n+1)t} dt = -\frac{1}{2(n+1)} \left(e^{-2(n+1)\pi} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

d'où le résultat.

Références