Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par :

$$u(x) = \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution : *Par opérations sur les développements limités, on calcule :*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = e - \frac{e}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc

$$u\left(x\right) = \left(\frac{e}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{e}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

mais

$$\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{e}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \overset{X=e/(2x)}{=\!=\!=\!=} \frac{2X}{e}\ln\left(X + \underset{X\to0^+}{o}\left(X\right)\right) \xrightarrow[X\to0^+]{} 0$$

donc $\boxed{u\left(x\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$.

Références