Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 juillet 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par :

$$u(x) = \left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right) \ln x$$

Solution : *On écrit $u(x)$ sous forme exponentielle :*

$$u(x) = \left(e^{x \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)} - 1\right) \ln x = \left(e^{x \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)} - 1\right) \ln x$$

et en utilisant les DLs et les équivalents usuels :

$$\ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right) = \ln\left(1 + 1/(x \ln x) + 1/\ln x \underset{x\to+\infty}{o}(1/x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/(x\ln x)$$

donc $x \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/\ln x$ *et* $\exp\left(x \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)\right) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/\ln x$.
Donc $u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x / \ln x = 1$. *On en déduit que* $\boxed{\lim_{+\infty} u = 1}$.

Références