# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

***Exercice 0.1*** ★ ***Pas de titre***

*Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\tan(x-1)}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\arctan x}{\sin^3 x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1^x+2^x+\cdots+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

***Solution :***

1.
$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\tan(x-1)} &\overset{X=x-1}{=\!=\!=} \frac{\ln\left(1+4X+2X^2\right)}{\tan X}\\ &= \frac{4X+\underset{X\to0}{o}(X)}{X+\underset{X\to0}{o}(X)}\\ &= \frac{4+\underset{X\to0}{o}(1)}{1+\underset{X\to0}{o}(1)}\\ &\xrightarrow[X\to0]{} \boxed{4}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &\overset{X=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \frac{1}{X}-\frac{1}{X^2}\ln(1+X)\\ &= \frac{1}{X}-\frac{1}{X^2}\left(X-\frac{X^2}{2}+\underset{X\to0}{o}\left(X^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\underset{X\to0}{o}(X)\\ &\xrightarrow[X\to0]{} \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

*3.*

$$\frac{x-\arctan x}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x-\arctan x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3} + \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{3}}$$

*4.*

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3 \sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin^3 x - x^3}{x^6} = \frac{-\frac{x^5}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}{x^6} = -\frac{1}{2x} + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

*et* $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = -\infty}$ *tandis que* $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = +\infty}$

*5.*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

*6.*

$$\left(\frac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{(1+x\ln 1) + (1+x\ln 2) + \cdots + (1+x\ln n) + \underset{x\to 0}{o}(x)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{n + (\ln 1 + \cdots + \ln n)\, x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \left(1 + \ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right) x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{\ln\left(1 + \ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right) x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{x}}$$

$$= e^{\frac{\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right) x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{x}}$$

$$= e^{\left(\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right) + \underset{x\to 0}{o}(1)\right)}$$

$$\underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)} = \boxed{n!^{\frac{1}{n}}}$$

## Références