Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x$
2. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{x^2}$
6. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+3x+2} - x &= x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} - 1\right) \\
&\underset{X=\frac{1}{x}}{=\!=} \frac{\sqrt{1+3X+2X^2} - 1}{X} \\
&= \frac{\frac{3}{2}X + \underset{X \to 0}{o}(X)}{X} \\
&= \frac{3}{2} + \underset{X \to 0}{o}(1) \xrightarrow[X \to 0]{} \boxed{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

2.

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}}$$
$$= e^{\frac{\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)}{x^2}}$$
$$= e^{\frac{-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}}$$
$$= e^{-\frac{1}{6}+\underset{x\to0}{o}(1)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \boxed{e^{-\frac{1}{6}}}$$

3.

$$\frac{\sin\left(x-\sin x\right)}{\sqrt{1+x^3}-1} = \frac{\sin\left(\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)}{\frac{1}{2}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}{\frac{1}{2}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}+\underset{x\to0}{o}(1)}{\frac{1}{2}+\underset{x\to0}{o}(1)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{3}}$$

4.

$$\frac{x\left(1+\cos x\right)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x} = \frac{-\frac{7}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}{-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}$$
$$= \frac{-\frac{7}{6}+\underset{x\to0}{o}(1)}{-\frac{1}{6}+\underset{x\to0}{o}(1)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \boxed{7}$$

5.

$$\frac{e^x-x-\cos x}{x^2} = \frac{x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}$$
$$= 1+\underset{x\to0}{o}(1) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \boxed{1}$$

6.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln\left(1+x\right)} = \frac{\ln\left(1+x\right)-x}{x\ln\left(1+x\right)}$$
$$\underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln\left(1+x\right)-x}{x^2}$$
$$= \frac{-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{2}+\underset{x\to0}{o}(1) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Références