Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}$

Solution :

1.
$$\begin{aligned} x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= x-\left(x-\frac{1}{2}+\underset{x\to+\infty}{o}(1)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\underset{x\to+\infty}{o}(1)\xrightarrow[x\to\infty]{}\boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x-x} &= \frac{-\dfrac{x^3}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^3)}{\dfrac{x^3}{3}+\underset{x\to0}{o}(x^3)}\\ &= \frac{-\dfrac{1}{2}+\underset{x\to0}{o}(1)}{\dfrac{1}{3}+\underset{x\to0}{o}(1)}\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

3.

$$\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}}$$

$$= e^{\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)}{x^2}}$$

$$= e^{\frac{\frac{x^2}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}}$$

$$= e^{\frac{1}{3}+\underset{x\to 0}{o}(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{e^{\frac{1}{3}}}$$

4.

$$\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}$$

$$= \frac{3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{3}{2}}$$

5.

$$\sqrt{x^2+x+1}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\underset{}{\overset{X=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}} \frac{1}{X}\left(\sqrt{1+X+X^2}-1\right)$$

$$= \frac{1}{X}\left(1+\frac{1}{2}X-1+\underset{X\to 0}{o}(X)\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\underset{X\to 0}{o}(1) \xrightarrow[X\to 0]{} \boxed{\frac{1}{2}}$$

6.

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}} \overset{X=x-2}{=\!=\!=} \frac{\sqrt{X+4}-2}{1-\sqrt{3X+1}}$$

$$= 2\frac{\sqrt{1+\frac{X}{4}}-1}{1-\sqrt{1+3X}}$$

$$= 2\frac{\frac{1}{8}X+\underset{X\to 0}{o}(X)}{-\frac{3}{2}X+\underset{X\to 0}{o}(X)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}+\underset{X\to 0}{o}(1)}{-\frac{3}{2}+\underset{X\to 0}{o}(1)}$$

$$\xrightarrow[X\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{6}}$$

Références