

Pas de titre

Alain Soyeur¹, François Capaces², and Emmanuel Vieillard-Baron³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

², ,

³Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

Exercice 0.1 Pas de titre

- Calculer $\int_0^x (1 + \tan^2 t) dt$.
- Déterminer le DL(0, 10) de $x \mapsto \tan x$.

Solution :

- On a $\int_0^x (1 + \tan^2 t) dt = \tan x$.
- On va se servir de deux arguments : 1) La primitivation fait gagner un ordre. 2) pour les fonctions paires ou impaires, la moitié des coefficients sont nuls, ce qui permet de gagner aussi un ordre. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \tan x$ admet des développements limités en 0 à tous ordres. On a donc successivement, en intégrant puis en élevant au carré :

$$1 + \tan^2 x = 1 + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\tan x = x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

$$1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

$$1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + 2\frac{2x^6}{15} + \frac{x^6}{9} + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o_{x \rightarrow 0}(x^8)$$

$$1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{34x^8}{315} + \frac{4x^8}{45} + o_{x \rightarrow 0}(x^9)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^8}{2835} + o_{x \rightarrow 0}(x^{10})$$

On pourrait continuer, mais les calculs de $\tan^2 x$ deviennent vite fastidieux. En revanche on peut ainsi démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(2n+1)}(0) > 0$.

Références