Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

16 janvier 2022

Exercice 0.1 ***Pas de titre***

— *Calculer* $\int_0^x (1+\tan^2 t)\,dt$.
— *Déterminer le* $DL(0,10)$ *de* $x \mapsto \tan x$.

Solution :

— *On a* $\int_0^x (1+\tan^2 t)\,dt = \tan x$.
— *On va se servir de deux arguments : 1) La primitivation fait gagner un ordre. 2) pour les fonctions paires ou impaires, la moitié des coefficients sont nuls, ce qui permet de gagner aussi un ordre. Par ailleurs, la fonction* $x \mapsto \tan x$ *admet des développements limités en* 0 *à tous ordres. On a donc successivement, en intégrant puis en élevant au carré :*

$$\begin{aligned}
1+\tan^2 x &= 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)\\
\tan x &= x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + 2\frac{2x^6}{15} + \frac{x^6}{9} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^8\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{34x^8}{315} + \frac{4x^8}{45} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^9\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^8}{2835} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{10}\right)
\end{aligned}$$

On pourrait continuer, mais les calculs de $\tan^2 x$ *deviennent vite fastidieux. En revanche on peut ainsi démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(2n+1)}(0) > 0$.

Références