Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en x_0 à l'ordre indiqué :

1. $\sin(x)$ *en* $x_0 = \frac{\pi}{4}$ *à l'ordre* 3
2. $\cos(x)$ *en* $x_0 = \frac{\pi}{3}$ *à l'ordre* 4
3. e^x *en* $x_0 = 1$ *à l'ordre* 4.
4. $\dfrac{\ln x}{x^2}$ *en* $x_0 = 1$ *à l'ordre* 4
5. $\sin x \cos 3x$ *en* $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ *à l'ordre* 2
6. $\arctan x$ *en* $x_0 = 1$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Posons* $t = x - \dfrac{\pi}{4}$. *Chercher le DL*$\left(\dfrac{\pi}{4}, 3\right)$ *de* $\sin x$ *revient à chercher celui de* $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ *en* 0 *:*

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + \underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right)\\ &= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{6}\right) + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)}\end{aligned}$$

2. *Comme précédemment, on se ramène en* 0 *en posant* $t = x - \dfrac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}t^3 + \frac{t^4}{48} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^4\right)\\ &= \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)}\end{aligned}$$

3. *On se ramène en 0 en posant $t = x - 1$. Il vient :*

$$\begin{aligned}
e^x &= e^{1+t} \\
&= e.e^t \\
&= e\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^4\right)\right) \\
&= \boxed{e\left(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^4\right)\right)}
\end{aligned}$$

4. *On pose $t = x - 1$:*

$$\begin{aligned}
\frac{\ln x}{x^2} &= \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2} \\
&= \frac{\ln(1+t)}{1+2t+t^2} \\
&= \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^4\right)\right)\left(1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right)\right) \\
&= t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 - \frac{77}{12}t^4 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^4\right) \\
&= \boxed{(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^4\right)}
\end{aligned}$$

5. *Posons $t = x - \dfrac{\pi}{3}$*

$$\begin{aligned}
\sin x \cos 3x &= \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\cos t + \pi \\
&= -\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\cos t \\
&= -\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right)\cos t \\
&= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right) \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to \frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)}
\end{aligned}$$

6. *Utilisant directement la formule de Taylor-Young, on trouve :*

$$\arctan x = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right)}$$

Références