Pas de titre

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer :

1. *Les racines troisièmes de* -8.
2. *Les racines cinquièmes de* $-i$
3. *Les racines sixièmes de* $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

Solution : *Soit* $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ *avec* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *On a* $-8 = 8e^{i\pi}$ *et* z *est une racine troisième de* -8 *si et seulement si* $\rho^3 = 8$ *et* $3\theta = \pi \ [2\pi]$. *Il vient alors* $\rho = 2$ *et* $\theta = \pi/3 \ [2\pi/3]$. *Donc* $z = \boxed{2e^{i\pi/3}}$ *ou* $z = 2e^{i(2\pi/3+\pi/3)} = 2e^{i\pi} = \boxed{-2}$ *ou* $z = 2e^{i(4\pi/3+\pi/3)} = 2e^{i5\pi/3} = \boxed{2e^{-i\pi/3}}$. *On vérifie réciproquement que ces trois nombres conviennent.*
2. *Comme* $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, *on a :* $z^5 = -i$ *si et seulement si* $\rho^5 = 1$ *et* $5\theta \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$ *c'est-à-dire si et seulement si* $\rho = 1$ *et* $\theta = -\frac{\pi}{10} \ \left[\frac{2\pi}{5}\right]$. *Les cinq racines cinquièmes de* $-i$ *sont donc :* $\boxed{e^{i(4k-1)\frac{\pi}{10}}}$ *avec* $k \in [\![0, 4]\!]$.
3. *De même, on montre que* $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$. *Par conséquent,* $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ *si et seulement si* $\rho^6 = 2$ *et* $6\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$, *c'est-à-dire si et seulement si :* $\rho = \sqrt[6]{2}$ *et* $\theta \equiv \frac{\pi}{9} \left[\frac{\pi}{3}\right]$. *Les six racines sixième de* $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ *sont donc :* $\boxed{e^{i\frac{(3k+1)\pi}{9}}}$ *avec* $k \in [\![0, 5]\!]$.

Références