

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué :

1. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ à l'ordre 7
2. $e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
3. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4
4. $\sqrt{3+\cos x}$ à l'ordre 3
5. $x \mapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9
6. $\ln(3e^x + e^{-x})$ à l'ordre 3

Solution :

1. Comme $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(\tan x) &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7) \\ &= \boxed{x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)} \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{1+x}} &= e^{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^3+o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= e \cdot e^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^3+o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= e \left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \\ &= \boxed{e \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{48}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (\ln(1+x))^2 &= \left(x - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right)^2 \\ &= \boxed{x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \sqrt{3 + \cos x} &= \sqrt{4 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= \boxed{2 - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \sin^6(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right)^6 \\ &= \boxed{x^6 - x^8 + o_{x \rightarrow 0}(x^9)} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \ln(3e^x + e^{-x}) &= \ln\left(4 + 2x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \\ &= \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \\ &= \boxed{2 \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \end{aligned}$$

Références