Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué :

1. $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ *à l'ordre* 3
2. $\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\tan x}$ *à l'ordre* 3
3. $\sqrt{1+\cos x}$ *à l'ordre* 5
4. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *à l'ordre* 3
5. $\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$ *à l'ordre* 4
6. $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Utilisant les formules usuelles :*

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln\left(1+x^2\right) - \ln(1+x) = \boxed{-x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}$$

2. *Comme* $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$ *et que* $\operatorname{th} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)} - \frac{1}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{45} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= \boxed{\frac{2}{3}x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{1+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\\
&= \boxed{\sqrt{2}\left(1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{384}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\\
&= e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)}\\
&= e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\\
&= ee^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\\
&= \boxed{e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) &= \ln\left(\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)\\
&= \boxed{\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) &= \ln\left(2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \ln 2\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \boxed{\ln 2+\frac{x}{4}-\frac{3}{32}x^2+\frac{5}{96}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

Références