Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué :

1. $(1+2x)^x$ *à l'ordre* 5
2. $\ln(1+\operatorname{sh} x)$ *à l'ordre* 4.
3. $\ln(\cos x)$ *à l'ordre* 6
4. $\sqrt{\cos x}$ *à l'ordre* 4
5. $e^{\operatorname{ch} x}$ *à l'ordre* 3
6. $\operatorname{th} x$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Par produit et composition de DLs :*

$$\begin{aligned}(1+2x)^x &= e^{x\ln(1+2x)}\\ &= e^{x\left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)\right)}\\ &= e^{2x^2-2x^3+\frac{8}{3}x^4-4x^5+\underset{x\to0}{o}(x^5)}\\ &= \boxed{1+2x^2-2x^3+\frac{14}{3}x^4-8x^5+\underset{x\to0}{o}\left(x^5\right)}\end{aligned}$$

2. *Par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}\ln(1+\operatorname{sh} x) &= \ln\left(1+x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \boxed{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5}{12}x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)}\end{aligned}$$

3. *Par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\underset{x\to0}{o}\left(x^6\right)\right)\right)\\ &= \boxed{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}\right)+\underset{x\to0}{o}\left(x^6\right)}\end{aligned}$$

4. Comme $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{5}{128}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$*, par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} &= \sqrt{1 + (\cos x - 1)} \\
&= \sqrt{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= \boxed{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96}} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{ch} x} &= e e^{(\operatorname{ch} x - 1)} \\
&= e\left(e^{\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\right) \\
&= \boxed{e\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

6. Par quotient de DLs :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \\
&= \frac{x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} \\
&= \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

Références