Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué :

1. $(e^x - 1)(\sin x - x)$ *à l'ordre* 6
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ *à l'ordre* 6
3. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ *à l'ordre* 4
4. $\tan x$ *à l'ordre* 5
5. $\arcsin x$ *à l'ordre* 5
6. $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}(e^x - 1)(\sin x - x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\\ &= \boxed{-\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{7}{360}x^6 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}\end{aligned}$$

2. *Par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}\\ &= \boxed{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}\end{aligned}$$

3. *Par quotient de DLs :* $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{130} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ *et donc par composition de DLs, on a :*

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{130} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \left(-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= \boxed{-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\end{aligned}$$

4. *On a prouvé dans la question 2 que* $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$ *donc, par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}
\end{aligned}$$

Voir aussi l'exercice **??**.

5. *Utilisant les formules usuelles :* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{8}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ *et donc par primitivation :*

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}$$

6. *Par quotient de DLs :*

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} \\
&= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)} \\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \boxed{1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

Références