Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

16 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué :

1. $\sin x \cos x$ *à l'ordre* 5
2. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ *à l'ordre* 3
3. $\arctan x$ *à l'ordre* 5.
4. $\operatorname{sh} x \cos x$ *à l'ordre* 5
5. $e^x\sqrt{1-x}$ *à l'ordre* 4
6. $e^{\sin x}$ *à l'ordre* 5.

Solution :

1. *Par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}\sin x \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\\ &= \boxed{x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\end{aligned}$$

On retrouve ce résultat en écrivant $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

2. *Appliquant les formules usuelles :*

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}$$

3. *Utilisant les formules usuelles, on a :* $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ *et donc par primitivation :*

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}$$

4. Par produit de DLs :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \cos x = & \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \\ = & \boxed{x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\end{aligned}$$

5. Par produit de DLs :

$$\begin{aligned}e^x\sqrt{1-x} = & -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \\ = & \boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{13x^3}{48} - \frac{79x^4}{384} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\end{aligned}$$

6. Par composition de DLs :

$$\boxed{e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}$$

Références