Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Solution : *On a : $\frac{f(x)}{x^2} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 donné par $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. D'autre part $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et*

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)}{x} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

qui diverge quand x tend vers 0. Donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Références