Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

En utilisant la formule de Taylor-Young, trouver les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^x$
2. $f : x \mapsto \sin x$
3. $f : x \mapsto \cos x$
4. $f : x \mapsto \operatorname{ch} x$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
6. $f : x \mapsto \ln(1-x)$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = e^x$ donc, par application de la formule de Taylor-Young, $f(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.
2. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc, par application de la formule de Taylor-Young, $f(x) = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+1}\right)$ où $p = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.
3. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc, par application de la formule de Taylor-Young, $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+1}\right)$ où $p = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.
4. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x \text{ si } k \text{ est pair} \\ \operatorname{sh} x \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$ donc, par application de la formule de Taylor-Young, $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+1}\right)$ où $p = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.

5. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ donc, par application de la formule de Taylor-Young, $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.
6. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et, utilisant le calcul précédent, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = -\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}$ donc, par application de la formule de Taylor-Young, $f(x) = -\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Références