Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < k|x-y|$$

1. *Montrez que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$;*
2. *On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - kx$. Montrez que la fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;*
3. *On suppose qu'il existe deux réels $a < b$ tels que*

$$\forall x \in [a,b],\ ka < f(x) < kb$$

Montrez qu'il existe un unique réel α dans $[a,b]$ vérifiant

$$f(\alpha) = k\alpha$$

Solution :

1. *Comme f est k-lipschitzienne (l'hypothèse de l'énoncé est plus forte), on montre facilement (voir le cours) que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. Calculons :*

$$\begin{aligned}\varphi(y) - \varphi(x) &= f(y) - f(x) - k(y-x) \\ &\leqslant |f(y) - f(x)| - k(y-x) \\ &< k|y-x| - k(y-x) \\ &< 0\end{aligned}$$

Donc la fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. *La fonction φ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$. D'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de l'intervalle $[a,b]$ vers l'intervalle $[\varphi(b), \varphi(a)]$. Mais $\varphi(a) = f(a) - ka > 0$ et $\varphi(b) = f(b) - kb < 0$ par hypothèse. Donc puisque $0 \in [\varphi(b), \varphi(a)]$, 0 possède un unique antécédent α par φ dans $[a,b]$. En conclusion, il existe un unique $\alpha \in [a,b]$ tel que $\varphi(\alpha) = k\alpha$.*

Références