

Pas de titre

Alain Soyeur¹, François Capaces², and Emmanuel Vieillard-Baron³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

², ,

³Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit une fonction définie sur \mathbb{R} telle qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

1. Montrez que f est uniformément continue sur \mathbb{R} ;
2. On définit la fonction φ sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = f(x) - kx$. Montrez que la fonction φ est strictement décroissante sur \mathbb{R} ;
3. On suppose qu'il existe deux réels $a < b$ tels que

$$\forall x \in [a, b], ka < f(x) < kb$$

Montrez qu'il existe un unique réel α dans $[a, b]$ vérifiant

$$f(\alpha) = k\alpha$$

Solution :

1. Comme f est k -lipschitzienne (l'hypothèse de l'énoncé est plus forte), on montre facilement (voir le cours) que la fonction f est uniformément continue sur \mathbb{R} .
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. Calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &= f(y) - f(x) - k(y - x) \\ &\leq |f(y) - f(x)| - k(y - x) \\ &< k|y - x| - k(y - x) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction φ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3. La fonction φ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$. D'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de l'intervalle $[a, b]$ vers l'intervalle $[\varphi(b), \varphi(a)]$. Mais $\varphi(a) = f(a) - ka > 0$ et $\varphi(b) = f(b) - kb < 0$ par hypothèse. Donc puisque $0 \in [\varphi(b), \varphi(a)]$, 0 possède un unique antécédent α par φ dans $[a, b]$. En conclusion, il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $\varphi(\alpha) = k\alpha$.

Références