Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Soit* $\theta \in [-\pi, \pi]$. *Déterminer le module et un argument de :* $e^{i\theta} + 1$ *et* $e^{i\theta} - 1$.
2. *En déduire le module et un argument, pour* $\theta \in]-\pi, \pi[$, *de :*

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1}.$$

Solution :

1. *Par factorisation par les angles moitiés (voir proposition* **??** *page* **??** *), on trouve :*

$$z = e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Il reste à étudier le signe de $\cos\frac{\theta}{2}$. *Comme* $\theta \in [-\pi, \pi]$, *alors* $\frac{\theta}{2} \in [-\pi/2, \pi/2]$ *et* $\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$. *Il vient donc :* $\boxed{|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}}$ *et* $\boxed{\arg(z) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]}$. *On montre de même que si* $z' = e^{i\theta} - 1$ *alors :*

$$z' = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

On étudie alors le signe de $\sin\frac{\theta}{2}$. *Comme* $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\sin\theta/2 \geqslant 0$ *si* $\theta \in [0, \pi]$ *et* $\sin\theta/2 < 0$ *si* $\theta \in [-\pi, 0[$. *Donc :*

$$\boxed{|z'| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \quad \textit{et} \quad \boxed{\arg(z') = \begin{cases} \dfrac{\theta+\pi}{2}\ [2\pi] & \textit{si } \theta \in [0, \pi] \\ \dfrac{\theta+3\pi}{2}\ [2\pi] & \textit{si } \theta \in [-\pi, 0[\end{cases}}$$

2. *En utilisant les résultats de la question précédente, on obtient :*

$$Z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1} = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} = \text{cotan}\,\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

On obtient $|Z| = |z|\,/\,|z'| = \boxed{\left|\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}\right|}$ *et* $\arg(Z) = \arg(z) - \arg(z') = \boxed{\begin{cases} -\pi/2 & \textit{si } \theta \in [0, \pi[\\ -\frac{3\pi}{2}\ [2\pi] & \textit{si } \theta \in]-\pi, 0[\end{cases}}$.

Références