Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

28 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

On définit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

1. *Montrer que si $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $\lambda f + \mu g \in E$.*
2. *On suppose que $f \in E$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $f = 0$.*
3. *Montrer que les éléments de E sont les fonctions affines.*

Indication 0.0 : Pour la seconde question, déterminer un ensemble A sur lequel on peut dire que f s'annule. Montrer que cet ensemble est dense et utiliser le raisonnement par densité.

Pour la troisième question, considérer $g(x) = f(x) - [f(0) + x(f(1) - f(0)]$.

Solution :

1. *Soit $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$(\lambda f + \mu g)\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\lambda\left(f(x)+f(y)\right) + \mu\left(g(x)+g(y)\right)}{2} = \frac{(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(y)}{2}$$

et donc $\lambda f + \mu g \in E$.

2. *On montre que $f(\frac{1}{2}) = 0$, puis que $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4}) = 0$, et ensuite, que f s'annule sur l'ensemble*

$$Z = \{\frac{k}{2^n}; n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant k \leqslant 2^n\}$$

Cet ensemble est dense dans $[0,1]$. En effet, considérons $x, y \in [0,1]$ tels que $x < y$. Comme $1/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^n < y - x$. Considérons l'ensemble $A = \{k \in [\![0, 2^n]\!] \mid k/2^n \geqslant x\}$. L'ensemble A est non vide et possède un plus petit élément k_0. Alors

$$y - \tfrac{k_0}{2^n} > x + \tfrac{1}{2^n} - \tfrac{k_0}{2^n} = x - \tfrac{k_0-1}{2^n} > 0$$

par définition de k_0. Donc $x \leqslant \frac{k_0}{2^n} < y$ et Z est bien dense dans $[0,1]$. Si alors $x \in [0,1]$, on peut construire une suite x_n de points de Z qui converge vers x. Mais puisque $\forall n \geqslant 1$, $f(x_n) = 0$, et que f est continue au point x, on obtient par l'image continue d'une suite que $f(x) = 0$. Donc f est la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$.

3. *Si $f \in E$, alors d'après la première question, la fonction $\varphi(x) = f(x) - [f(0) + x(f(1) - f(0))]$ est encore dans E (car une fonction affine est dans E et la différence de deux fonctions de E est encore une fonction de E). Puisque $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, d'après la seconde question, il vient que $\varphi = 0$, et donc que f est affine. Réciproquement, toute fonction affine est bien une fonction de E.*

Références