

Pas de titre

Alain Soyeur¹, François Capaces², and Emmanuel Vieillard-Baron³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

², ,

³Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

On définit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

1. Montrer que si $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $\lambda f + \mu g \in E$.
2. On suppose que $f \in E$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $f = 0$.
3. Montrer que les éléments de E sont les fonctions affines.

Indication 0.0 : Pour la seconde question, déterminer un ensemble A sur lequel on peut dire que f s'annule. Montrer que cet ensemble est dense et utiliser le raisonnement par densité.

Pour la troisième question, considérer $g(x) = f(x) - [f(0) + x(f(1) - f(0))]$.

Références