Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

7 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

On définit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

1. *Montrer que si $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $\lambda f + \mu g \in E$.*
2. *On suppose que $f \in E$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $f = 0$.*
3. *Montrer que les éléments de E sont les fonctions affines.*

Indication 0.0 : *Pour la seconde question, déterminer un ensemble A sur lequel on peut dire que f s'annule. Montrer que cet ensemble est dense et utiliser le raisonnement par densité.*

Pour la troisième question, considérer $g(x) = f(x) - [f(0) + x(f(1) - f(0)]$.

Références