# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★ ***Pas de titre***

*Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue vérifiant :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$.*
2. *On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.*
3. *On suppose que $f$ n'est pas la fonction nulle. Déterminer la fonction $f$.*

***Solution :***

1. *Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f(x) = \left(f(\frac{x}{2})\right)^2 \geqslant 0$, il vient que la fonction $f$ est positive.*
2. *S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors si $z \in \mathbb{R}$, $f(z) = f(x)f(z-x) = 0$, et donc $f$ est la fonction nulle.*
3. *Supposons donc que $f \neq 0$. Posons alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$. Alors $g$ vérifie*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = g(x) + g(y)$$

*On sait alors qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ (voir l'exercice **??**) tel que $g(x) = ax$. Mais alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax} = a^x$. On vérifie réciproquement qu'une telle fonction vérifie les hypothèses de l'énoncé.*

## Références