Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une fonction $f :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue au point 1. On suppose que

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[,\ f(xy) = f(x) + f(y)$$

Déterminez toutes les fonctions f vérifiant ces propriétés.

Solution : *Considérons une fonction f vérifiant les propriétés de l'énoncé. Définissons alors la fonction*

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f \circ \exp(x) \end{array} \right.$$

La fonction g est continue au point 0 et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+y) = g(x) + g(y)$$

en prenant $x = y = 0$, on montre que $g(0) = 0$. Si $m \in \mathbb{N}^*$ alors, en posant $a = g(1)$, on a : $g(m) = ma$ et $a = g(1) = g\left(m.\frac{1}{m}\right) = mg\left(\frac{1}{m}\right)$ donc $g\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{a}{m}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $g(r) = ar$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est clair que comme $0 = g(x-x) = g(x) + g(-x)$, alors $g(-x) = -g(x)$. Donc : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = a.r$. Montrons que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}$. Puisque $g(x_0+h) = g(x_0) + g(h)$, on a

$$|g(x_0+h) - g(x_0)| = |g(h) - g(0)|$$

et la continuité en x_0 s'obtient facilement de la continuité de g en 0. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$, il existe $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Mais comme g est continue en x, il vient que $g(x) = g(\lim r_n) = \lim g(r_n) = \lim ar_n = ax$. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$ et alors $\forall y \in]0,+\infty[$, $f(x) = a \ln x$. On vérifie réciproquement que toutes ces fonctions vérifient les conditions de l'énoncé.

Références