Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la suite*

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$$

2. *Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x+1) = f(x)$$

Solution :

1. *La suite s'étudie classiquement. La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x-1}{2}$ est strictement croissante, admet comme seul point fixe $x_0 = -1$ et vérifie $h(x) \geqslant x$ si $x \in]-\infty, -1]$ et $h(x) \leqslant x$ si $x \in [-1, +\infty[$. Donc si $u_0 \in]-\infty, -1]$, la suite (u_n) est croissante et majorée par -1. Elle converge alors vers l'unique point fixe de h. De même, si $u_0 \in [-1, +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par -1 et converge aussi vers -1. En résumé : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$.*
2. *Puisque f est continue en -1, $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(-1)$. Mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) = f(2u_{n+1}+1) = f(u_n)$ et par conséquent, la suite $f(u_n)$ est constante. On en déduit que $f(x) = f(-1)$ et donc f est une fonction constante. Réciproquement, les fonctions constantes vérifient la propriété de l'énoncé.*

Références