Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ *continue sur l'intervalle* $[0, +\infty[$ *telle que*

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x^2) = f(x)$$

Déterminer la fonction f.

Indication 0.0 : *Soit* $x > 0$, *considérer la suite récurrente*

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Solution : *La suite récurrente de l'énoncé s'étudie classiquement : si* $x > 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. *Comme la fonction* f *est supposée continue, si* $x > 0$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$. *Mais puisque* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) = f(u_{n+1}^2) = f(u_n)$, *la suite* $\big(f(u_n)\big)$ *est constante. Par conséquent,* $f(x) = f(1)$.

On a montré que la fonction f *est constante sur* $]0, +\infty[$. *Ensuite, puisque la fonction* f *est continue en* 0, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ *et comme* $\forall x > 0$, $f(x) = f(1)$, *il vient que* $f(0) = f(1)$. *Par conséquent les seules fonctions vérifiant l'hypothèse de l'énoncé sont les fonctions constantes.*

Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

Références