

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = -f(x)$$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Considérons la suite $x_n = \frac{x}{2^n}$. On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = (-1)^n f(x)$. Mais puisque $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que f est continue en 0, $f(x) = (-1)^n f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$. Donc $f(x) = f(0)$. De plus, comme $f(0) = -f(0)$, on a $f(0) = 0$ et $f = 0$. Réciproquement la fonction nulle vérifie l'hypothèse.

Références