Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k \neq 1$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(kx) = f(x).$$

Montrer que f est une fonction constante.

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par une récurrence facile que $f(x) = f\left(\frac{x}{k^n}\right)$. De plus, comme f est continue en 0, en appliquant le théorème de composition d'une suite par une fonction, on montre que : $f\left(\frac{x}{k^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ donc par unicité de la limite $f(x) = f(0)$. On en déduit que f est constante. Réciproquement, on vérifie que les fonctions constantes sont solutions.*

Références