Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

9 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$$

Montrez que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution : *Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon/2$. La fonction f est continue sur le segment $[0, A+2]$ et donc d'après le théorème de Heine, est uniformément continue sur ce segment. Donc il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall (x,y) \in [0, A+1]^2 \ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\eta' = \min(\eta, 1)$. Soit maintenant $(x,y) \in [0,+\infty[^2$ tels que $|x-y| \leqslant \eta'$. Étudions les cas suivants :

- *si $(x,y) \in [0, A+1]^2$, on a bien puisque $|x-y| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$;*
- *si par exemple $x \in [0, A+1]$ et $y \in [A+1, +\infty[$. Comme $|x-y| \leqslant \eta' \leqslant 1$, on a $x \in [A, A+1]$ et $y \in [A+1, +\infty[$, donc $x, y \in [A, +\infty[$ et donc*

$$|f(x) - f(y)| = |[f(x) - l] + [l - f(y)]| \leqslant |f(x) - l| + |f(y) - l| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Donc dans tous les cas, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. La fonction est bien uniformément continue.

Références