Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

30 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ *continue sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$$

Montrez que la fonction f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, *il existe* $A > 0$ *tel que* $\forall x \geqslant A$, $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon/2$. *La fonction* f *est continue sur le segment* $[0, A+2]$ *et donc d'après le théorème de Heine, est uniformément continue sur ce segment. Donc il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\forall (x, y) \in [0, A+1]^2 \ |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\eta' = \min(\eta, 1)$. *Soit maintenant* $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ *tels que* $|x - y| \leqslant \eta'$. *Étudions les cas suivants :*

— *si* $(x, y) \in [0, A+1]^2$, *on a bien puisque* $|x - y| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ *;*

— *si par exemple* $x \in [0, A+1]$ *et* $y \in [A+1, +\infty[$. *Comme* $|x - y| \leqslant \eta' \leqslant 1$, *on a* $x \in [A, A+1]$ *et* $y \in [A+1, +\infty[$, *donc* $x, y \in [A, +\infty[$ *et donc*

$$|f(x) - f(y)| = |[f(x) - l] + [l - f(y)]| \leqslant |f(x) - l| + |f(y) - l| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Donc dans tous les cas, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. *La fonction est bien uniformément continue.*

Références