Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrez que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution : *Comme la fonction f est périodique, il existe $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Considérons le segment $[0, 2T]$. Comme la fonction f est continue sur ce segment, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur ce segment. Donc il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall (x,y) \in [0,2T]^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\eta' = \min(\eta, T) > 0$. Considérons maintenant $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x-y| \leqslant \eta'$, avec pour simplifier $x \leqslant y$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tels que $x - nT \in [0,T]$ et $y - nT \in [0, 2T]$ (il suffit de poser $n = E(x/T)$). Alors puisque $(x-nT, y-nT) \in [0,2T]^2$ et $|(x-nT)-(y-nT)| = |x-y| \leqslant \eta$, on a $|f(x-nT) - f(y-nT)| \leqslant \varepsilon$. Mais puisque $f(x-nT) = f(x)$ et $f(y-nT) = f(y)$, il vient finalement que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Références