Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux fonctions $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ lipschitziennes. Montrez que la fonction fg est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Solution : *Comme les fonctions f et g sont continues sur le segment $[a,b]$, elles sont bornées. Notons $M_f = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ et $M_g = \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Comme f et g sont lipschitziennes sur $[a,b]$, il existe deux constantes k_f et k_g telles que*

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k_f|x-y| \text{ et } |g(x)-g(y)| \leqslant k_g|x-y|$$

Posons alors

$$K = M_g k_f + M_f K_g$$

Vérifions que fg est K-lipschitzienne. Soit $(x,y) \in [a,b]^2$. Écrivons

$$\begin{aligned} |fg(x) - fg(y)| &= \Big|g(x)\big[f(x) - f(y)\big] + f(y)\big[g(x)-g(y)\big]\Big| \\ &\leqslant |g(x)||f(x)-f(y)| + |f(y)||g(x)-g(y)| \\ &\leqslant M_g k_f|x-y| + M_f k_g|x-y| \\ &\leqslant K|x-y| \end{aligned}$$

Références