Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère des fonctions réelles f et g définies et continues sur $[0,1]$. On définit une fonction φ par :

$$\varphi(t) = \sup_{x\in[0,1]} \left(f(x) + tg(x)\right).$$

1. *Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que φ est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

Solution :

1. *Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme f et g sont continues sur le segment $[0,1]$, la fonction $\theta : x \mapsto f(x)+tg(x)$ est continue sur $[0,1]$. θ est donc bornée sur $[0,1]$ et atteint ses bornes. On note x_t un réel élément de $[0,1]$ tel que $\theta(x_t) = \sup_{x\in[0,1]} \theta(t)$. On a alors : $\varphi(t) = \theta(x_t)$ et φ est définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soient $t, t' \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\varphi(t) - \varphi(t') = tg(xt) - t'g(xt) + (f(xt) - f(xt') + t'g(xt') - t'g(xt)) = tg(xt) - t'g(xt)$$

et de même

$$\varphi(t') - \varphi(t) = t'g(xt') - tg(xt')$$

Donc

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| = \max(|tg(xt) - t'g(xt)|, |t'g(xt') - tg(xt')|) = M|t - t'|.$$

On prouve ainsi que φ est Lipschitzienne de rapport M.

Références