Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un réel $a > 0$ et une fonction $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ croissante. On suppose que la fonction f admet une limite finie l lorsque $x \to +\infty$ et que la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$$

est croissante. Montrez que la fonction f est constante.

Solution : *Montrons que f est constante par l'absurde. S'il existe $b > a$ tel que $f(b) \neq f(a)$, puisque la fonction f est croissante, on aurait $f(b) > f(a)$. Soit $x \geqslant b$. Comme la fonction g est croissante,*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Donc $f(x) \geqslant (x - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$. Posons $\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$. On a $\forall x \geqslant b$, $f(x) \geqslant \alpha(x - a) + f(a) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, une absurdité.

Références