Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et une constante $K > 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leqslant 1 \Rightarrow \bigl|f(x) - f(y)\bigr| \leqslant K|x - y|$$

Montrer que f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Solution : *Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $x < y$. On peut considérer $x_0 = x$, $x_1 = x + 1$, $\dots$, $x_k = x + k$, $x_n = y$ avec $y - x_{n-1} \leqslant 1$. Alors*

$$\bigl|f(y)-f(x)\bigr| = \bigl|f(y)-f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_{n-2})+\cdots+f(x_1)-f(x)\bigr| \leqslant \bigl|f(y)-f(x_{n-1})\bigr|+\bigl|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})\bigr|+\cdots+\bigl|f(x$$

et donc

$$\bigl|f(y) - f(x)\bigr| \leqslant K\bigl[(x_1 - x) + (x_2 - x_1) + \cdots + (y - x_n)\bigr] = K(y - x)$$

Références