Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

27 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une réunion de deux segments $K = [a, b] \cup [c, d]$ avec $a < b < c < d$. Soit $f : K \mapsto K$ une fonction continue sur l'ensemble K. On suppose que $\forall (x, y) \in K^2$,

$$x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

On considère la fonction φ définie sur K par $\varphi(x) = |f(x) - x|$. Montrez que la fonction φ possède un minimum sur K. Montrez par l'absurde que ce minimum est nul. En déduire que la fonction f admet un unique point fixe $x_0 \in K$.

Solution : *La fonction φ est continue comme somme et valeur absolue de fonctions continues. Elle est donc continue en tout point de l'ensemble K. Comme la fonction φ est continue sur le segment $[a, b]$, elle possède un minimum $M_1 = \varphi(x_1)$ sur $[a, b]$ avec $x_1 \in [a, b]$. De même, elle possède un minimum M_2 sur le segment $[c, d]$ avec $M_2 = \varphi(x_2)$ où $x_2 \in [c, d]$. On pose $m = \min\{M_1, M_2\}$ et on vérifie que M est un minimum de la fonction φ sur K. Donc on a montré que*

$$\exists x_0 \in K \ : \quad \forall x \in K,\ \varphi(x_0) \leqslant \varphi(x)$$

Si par l'absurde, $\varphi(x_0) \neq 0$, en utilisant l'inégalité de l'énoncé, puisque $f(x_0) \neq x_0$, et $f(x_0) \in K$, on aurait

$$\Big| f\big(f(x_0)\big) - f(x_0) \Big| < |f(x_0) - x_0|$$

et donc $\varphi\big(f(x_0)\big) < \varphi(x_0)$ ce qui est impossible. Par conséquent, $\varphi(x_0) = 0$ et donc $f(x_0) = x_0$. Montrons l'unicité du point fixe. S'il existait deux points fixes $x_1 \in K$ et $x_2 \in K$, avec $x_1 \neq x_2$ on aurait

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$$

et donc $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$ une absurdité.
Remarque : l'hypothèse f continue est superflue, puisque f est lipschitzienne.

Références