Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux fonctions continues f et g sur le segment $[0,1]$ vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 < f(x) < g(x)$$

On considère une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$ et l'on définit la suite (a_n) par

$$a_n = \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)^n$$

Déterminer la limite de la suite (a_n).

Indication 0.0 : *En utilisant le fait que $[0,1]$ est un* segment, *montrer que* $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant k < 1$ *sur* $[0,1]$.

Solution : *La fonction $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur ce segment : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $\sup_{x\in[0,1]} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = k < 1$. Donc*

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 < \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant k < 1$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant k^n$ et comme $k < 1$, la suite géométrique (k^n) converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la suite (a_n) converge vers 0.

Références