Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ et } f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$$

Montrez que la fonction f possède un minimum.

Solution : *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Posons $A = f(x_0)$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$, d'après la définition de la limite, il existe $B > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$. On a en particulier $x_0 \in [-B, B]$. La fonction f est continue sur le segment $[-B, B]$ et donc possède un minimum sur ce segment :*

$$\exists c \in [-B, B] \mid \forall x \in [-B, B],\ f(c) \leqslant f(x)$$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(c)$ ce qui montrera que $f(c)$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [-B, B]$, on a bien $f(c) \leqslant f(x)$. Si $x \notin [-B, B]$, alors $f(x) \geqslant A = f(x_0)$ et comme $x_0 \in [-B, B]$, il vient que $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant f(c)$.

Références