

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soient deux fonctions $f, g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < g(x)$$

Montrez qu'il existe un réel $k > 1$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], g(x) \geq kf(x)$$

Solution : Considérons la fonction φ définie sur le segment $[0, 1]$ par $\varphi(x) = g(x)/f(x)$. Comme la fonction f ne s'annule pas, φ est définie et continue sur le segment $[0, 1]$ et possède donc un minimum. Il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) \geq \varphi(x_0)$. Posons $k = \varphi(x_0)$. Comme $f(x_0) < g(x_0)$, $k > 1$ et alors $\forall x \in [0, 1], g(x)/f(x) \geq k$ d'où le résultat.

Références