Pas de titre

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + (5 + 7\,i)z + 10 - 2\,i.$$

1. *Montrer que P possède une racine imaginaire pure.*
2. *En déduire une factorisation de P de la forme $P(z) = (z - 2\,i)Q(z)$ où Q est un polynôme du second degré à coefficients complexes.*
3. *Résoudre alors $P(z) = 0$ et factoriser complètement le polynôme P sur $\mathbb{C}$.*

Solution :

1. *Le nombre complexe $\boxed{2i}$ est une racine de P.*
2. *P admet alors une factorisation de la forme $P(z) = (z-2\,i)Q(z)$ avec $Q\,(z) = az^2+bz+c$ un polynôme à coefficients complexes à déterminer. Par identification, on montre que $Q\,(z) = z^2 + (-1 + 2\,i)z + 1 + 5\,i$.*
3. *En appliquant le théorème de résolution des équations du second degré à coefficients complexes, on trouve que les racines de Q sont $-1 + i$ et $2 - 3i$. On a donc : $\boxed{P = (z - 2i)\,(z + 1 - i)\,(z - 2 + 3i)}$.*

Références