Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

On considère une fonction contractante f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant k|x-y|$$

avec $0 \leqslant k < 1$.

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,*
$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + k|x|$$
2. *On considère la fonction*
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-x \end{array} \right.$$
Montrer que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et que $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
3. *Montrer que f possède un unique point fixe :*
$$\exists ! x_0 \in \mathbb{R} \ \ tq\ f(x_0) = x_0$$

Solution :

1. *Utilisons la minoration de l'inégalité triangulaire et le fait que f est contractante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$|f(x)| - |f(0)| \leqslant k|x-0|$$
2. *En utilisant la majoration précédente, pour $x > 0$, on obtient que :*
$$g(x) \leqslant |f(0)| + (k-1)x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$
et pour $x < 0$,
$$g(x) \geqslant -|f(0)| + (k-1)x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$$
On conclut alors grâce au théorème des gendarmes.

3. *Comme* $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ *et que* $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, *il existe* $A, B \in \mathbb{R}$ *tels que* $g(A) < 0$ *et* $g(B) > 0$. *On applique alors le théorème des valeurs intermédiaires à* g *sur le segment* $[A, B]$ *et on montre qu'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $g(x_0) = 0$. *Le réel* x_0 *est un point fixe de* f. *Il est unique car si* x_0' *est un autre point fixe de* f *alors comme* f *est une fonction contractante, il vient que*

$$|x_0 - x_0'| = |f(x_0) - f(x_0')| \leqslant k\,|x_0 - x_0'|$$

ce qui est impossible, à moins que $x_0 = x_0'$, *car* $k \in [0, 1[$.

Références